Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Први разред - А категорија

1. Познато је да је број 219821459173083304870l3369 једнак броју n^{13}, за неки природни број n. Одредити број n.

2. Дата је табла димензија 2023×2024. Аца и Бранко играју следећу игру: Најпре Аца бира поље табле и поставља краљицу, а потом наизменично одигравају потез краљицом (у складу са шаховским правилима), при чему у сваком потезу померају краљицу на неко од поља табле на које краљица до тада није стала (током игре не могу померити краљицу на почетно поље - поље на које је Аца, у почетку игре, поставио краљицу). Игру губи играч који не може да одигра потез. Уколико Бранко игра први (након што је Аца поставио краљицу), који играч има победничку стратегију?

3. Са колико највише нула може да се завршава број $N = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где је $n \in \mathbb{N}$?

4. Нека је X средиште основице AB трапеза $ABCD$. Ако је $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX$, доказати да су симетрале углова $\sphericalangle ADX, \sphericalangle DXC$ и $\sphericalangle XCB$ праве истог прамена, тј. да се све три секу у једној тачки или да су паралелне.

5. Бесконачни низ природних бројева a_1, a_2, a_3, ... је дефинисан са:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да важи

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_{2024}}{2^{2024}} < 2.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Други разред - А категорија

1. Наћи најмању вредност израза $|202^a - 4^b|$, где су a и b произвољни природни бројеви.

2. Одредити све парове целих бројева $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ за које важи
$$(a^2 + b)(a + b^2) = (a - b)^3.$$

3. У тангентном петоуглу $ABCDE$ важе следеће једнакости:
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle EBD = \sphericalangle DAE \quad \text{и} \quad \sphericalangle ABE = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD.$$
Да ли петоугао $ABCDE$ мора бити правилан?

4. Одредити све парове природних бројева $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x > y$, такве да је
$$[x^2 + xy, xy - y^2] + [x - y, xy] = 2^{2023},$$
при чему $[a, b]$ означава најмањи заједнички садржалац природних бројева a и b.

5. Одредити све природне бројеве n за које постоји n градова који су повезани путевима (пут је двосмерна веза између два различита града, чији су крајеви та два града), таквим да за свако i, $1 \leqslant i \leqslant n$, постоји град са тачно i путева којима је један од крајева управо тај град (између било која два града може постојати и више од једног пута).

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Трећи разред - А категорија

1. Нека је p прост број облика $4k+1$, за неко $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Доказати да је
$$\tau((p-2)!!^2+1) \geqslant 8,$$
где је $\tau(n)$ укупан број позитивних делилаца природног броја n (за $m = 2n-1$ важи $m!! = (2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1$, $n \in \mathbb{N}$).

2. У скупу реалних бројева решити једначину
$$x^2 - 4x + 10 = \sqrt{x^3-4} + \sqrt{3x^3-20} + 2\sqrt{9-x^3}.$$

3. Дата је табла димензија 2023×2024. Аца и Бранко играју следећу игру: Најпре Аца бира поље табле и поставља скакача, а потом наизменично одигравају потез скакачем (у складу са шаховским правилима), при чему у сваком потезу померају скакача на неко од поља табле на које скакач до тада није стао (током игре не могу померити скакача на почетно поље - поље на које је Аца, у почетку игре, поставио скакача). Игру губи играч који не може да одигра потез. Уколико Бранко игра први (након што је Аца поставио скакача), који играч има победничку стратегију?

4. Одредити полином P са целобројним коефицијентима, такав да је број $P(n)+22^n$ дељив са 2401, за свако $n \in \mathbb{N}$.

5. Дат је троугао ABC са ортоцентром H и описаном кружницом k. Нека је A' тачка таква да је AA' пречник кружнице k. Нека је M средиште странице BC и нека права AH сече кружницу k у тачки D. Кружница кроз тачке M и A', која додирује кружницу k, сече праву BC, поново, у тачки E. Доказати да се праве DM и $A'E$ секу на кружници k.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Четврти разред - А категорија

1. Нека је A укупан број могућих бојења свих темена правилног $n-$тоугла, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, у три различите боје, а B укупан број могућих бојења тих истих темена у четири различите боје, при чему су у другом случају суседна темена обојена различитим бојама. У зависности од n, размотрити који број, A или B, је већи и за колико (приликом бојења не морају све боје бити употребљене)?

2. Одредити све природне бројеве n такве да за свако $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи неједнакост

$$\frac{n \sin x + \operatorname{tg} x}{x} > n + 1.$$

3. На страницама DE и EF правилног шестоугла $ABCDEF$, редом, уочене су тачке X и Y. Нека је AXX' једнакостраничан троугао, при чему су тачке X' и E са супротних страна праве AX, а AYY' једнакостраничан троугао, при чему су тачке Y' и E са супротних страна праве AY. Ако је $X'Y' = 3AB$, доказати да је $EX = EY$.

4. Да ли постоји полином P са целобројним коефицијентима за који важи

$$-7 \leqslant P(-1) \leqslant -4 \quad \text{и} \quad P(2024) = P(20)^{24} + P(24)^{20}?$$

5. Одредити све реалне бројеве x за које постоји природан број n и коначан низ реалних бројева $x_1, \ldots, x_n$, таквих да је $x_1 = x$, $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{\{x_k\}}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, при чему је $x_n \in Z$ ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, где је $\lfloor x \rfloor$ највећи цео број не већи од x, $x \in \mathbb{R}$).

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Први разред - Б категорија

1. Колико се највише краљева може поставити на класичну шаховску таблу тако да се они међусобно не нападају (сваки краљ напада неког другог краља у складу са познатим шаховским правилима)?

2. Младен, Иван и Растко су другари који често заједно иду на пијацу. Зна се да свако од њих на пијаци купује увек исто воће и то купине или малине (само једно воће од набројаних). С тим у вези, ко од њих шта купује, познати су следећи искази:

1° Ако Младен купује малине, онда Растко купује исто воће као и Иван.

2° Ако Растко купује малине, онда Иван купује другачије воће од Младена.

3° Ако Иван купује купине, онда Младен купује исто воће као и Иван.

Да ли су ове изјаве непротивречне?

За кога од њих можемо са сигурношћу да тврдимо шта купује?

3. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, $AB > AC$, и нека је дуж AD висина из темена A тог троугла. Означимо са E тачку праве BC, $E \neq C$, за коју је $DE = DC$. Претпоставимо да се праве AE и BH секу у тачки S. Ако је тачка N средиште дужи AE, а тачка M средиште дужи BH, доказати да је права MN нормална на праву DS.

4. Дата је функција $f : [0, 1) \to (0, 2]$, која је дефинисана захтевом:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ако је } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{ако је } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

(а) Решити неједначину $f(x) \geqslant \frac{3}{2}$.
(б) Одредити инверзну функцију дате функције.

5. Нека су $\overline{abc}$ и $\overline{def}$, $a \cdot c \cdot d \cdot f \neq 0$, троцифрени бројеви за које важи $\overline{abc} + \overline{cba} = \overline{def} + \overline{fed}$. Доказати да бројеви $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ имају исту цифру десетице.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Други разред - Б категорија

1. За правоугаони сто са 30 столица (15 столица са једне ивице стола и насрам њих још 15 столица) треба сместити 15 брачних парова (муж и жена чине брачну заједницу), тако да свака жена седи или поред или прекопута свог мужа. На колико начина је ово могуће учинити?

2. Ако су a, b и c реални бројеви такви да неједнакост $ax^2 + bx + c > 0$ важи за свако $x \in \mathbb{R}$, доказати да тада за свако $x \in \mathbb{R}$ важи и неједнакост $cx^2 + bx + a \geqslant 0$.

3. Нека је X средиште основице AB трапеза $ABCD$. Ако је $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX$, доказати да су симетрале углова $\sphericalangle ADX, \sphericalangle DXC$ и $\sphericalangle XCB$ праве истог прамена, тј. да се све три секу у једној тачки или да су паралелне.

4. У оштроуглом троуглу ABC, $AB > AC$, тачка D је пресечна тачка симетрале унутрашњег угла у темену A и странице BC тог троугла. Нека је тачка E подножје нормале из тачке D на праву AB. Ако је дуж CE тежишна дуж троугла ABC, доказати да је $AF = \frac{AB-AC}{2}$, при чему је F подножје висине из темена C троугла ABC.

5. Одредити онај природан број n за који важи да број 2024^n има тачно 160 природних делилаца.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Трећи разред - Б категорија

1. У троуглу ABC, са угловима α, β и γ у теменима A, B и C, редом, важи да је

$$\sin\alpha = 2023\sin\beta\sin\gamma \quad \text{и} \quad \cos\alpha = 2023\cos\beta\cos\gamma.$$

Одредити вредност израза $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

2. Дат је конвексан и тетивни четвороугао $ABCD$. Нека је X пресек симетрала унутрашњих углова у теменима A и B тог четвороугла и нека је Y пресек симетрала унутрашњих углова у теменима C и D тог четвороугла. Доказати да тачке D, A, X и Y леже на једној кружници.

3. У једној европској школи од n ученика организована је журка. На журци се ученици друже и сваки ученик се спријатељио са пријатељима свог пријатеља. Пријатељство је узајамни другарски однос између две особе.

(а) Колико је минимално пријатељстава на почетку журке потребно тако да сви на крају провода буду пријатељи, односно, тако да су на крају журке, било које две случајно изабране особе, у пријатељском односу?
(б) Колико је максимално пријатељстава на почетку журке потребно тако да не буду сви на крају провода пријатељи, односно, тако да на крају журке постоје две особе које нису у пријатељском односу?

4. Дужине страница троугла су природни бројеви. Једна страница је дужине 13, а наспрам ње је угао 120°. Одредити површину тог троугла. Наћи сва решења.

5. Одредити последње две цифре броја $2^{3^{2024}}$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

10. фебруар 2024.

Четврти разред - Б категорија

1. Познато је да решења једначине $9x^3 - 63x^2 + 122x - 56 = 0$ чине аритметичку прогресију. Наћи та решења.

2. У троуглу ABC, са угловима α, β и γ у теменима A, B и C, редом, важи да је

$$\sin\alpha = 2023\sin\beta\sin\gamma \quad \text{и} \quad \cos\alpha = 2023\cos\beta\cos\gamma.$$

Одредити вредност израза

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^3\alpha + \cdots + \operatorname{tg}^{2023}\alpha}{\operatorname{tg}^{-1}\alpha + \operatorname{tg}^{-2}\alpha + \operatorname{tg}^{-3}\alpha + \cdots + \operatorname{tg}^{-2023}\alpha}.$$

3. За датум у облику $X.Y.Z.$ где је X дан, Y месец, а Z година, дефинишемо његову „запањеност“ као природан број $\overline{XYZ}$. Тако је на пример за датум 12.3.1845. његова запањеност 1231845. За датум кажемо да је запањујући ако су у његовој запањености све цифре на непарним позицијама, као и све цифре на парним позицијама, једнаке. Неки примери запањујућих датума су 12.12.1212. и 7.3.737. Колико је у Новој Ери, тј. почев од 1. јануара прве године Нове Ере) до данас, било запањујућих датума?

4. Тежиште троугла ABC је тачка T, а центар уписане кружнице тог троугла је тачка S. Ако је $AB = 25$, $ST = 3$ и $AB \parallel ST$, одредити дужине осталих страница троугла ABC.

5. Нека је $\mathcal{P}$ скуп свих простих бројева. У скупу $\mathcal{P}$, по p, q и r, решити једначину

$$p^{q^r} + q^r + r = 2024.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.